Bemerkung über die Konvergenz der Orthogonalreihen

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Herrn Professor B. Szőkefalvi-Nagy zum 60. Geburtstag gewidmet

1. A. SZÉP hat das folgende Problem aufgeworfen. Gibt es eine quadratisch-integrierbare orthogonale Entwicklung

$$\sum a_n \varphi_n(x),$$

die fast überall im Orthogonalitätsintervall konvergiert, und eine fast überall divergierende Teilreihe

$$\sum a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) \tag{2}$$

besitzt?

In dieser Note werden wir auf dieses Problem eine Antwort geben. Man soll aber gewisse Bemerkungen vorausschicken. Die Behauptung kann offensichtlich nicht für jede Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ mit $\Sigma a_n^2 < \infty$ richtig sein. Gilt nämlich die Menchoff—Rademachersche Bedingung

$$\sum a_n^2 \log^2 n < \infty,$$

dann folgt auf Grund des Menchoff—Rademacherschen Satzes ([1], [2]), daß für beliebige Indexfolge $\{n_k\}$ die Reihe (2) fast überall konvergiert. Also kann die Behauptung nur für solche Koeffizientenfolgen $\{a_n\}$ richtig sein, für die (3) nicht erfüllt ist.

Wir werden Folgendes beweisen.

Satz. *Es sei $\{a_n\}$ eine monoton nichtwachsende Folge von positiven Zahlen, für die $\Sigma a_n^2 < \infty$ und*

$$\sum a_n^2 \log^2 n = \infty \tag{3}$$

erfüllt sind. Dann gibt es ein im Intervall $(0, 1)$ *orthonormiertes System* $\{\varphi_n(x)\}$ *und* *eine Indexfolge* $\{n_k\}$ *derart, daß die Reihe* (1) *in* (0, 1) *fast überall konvergiert, und die Teilreihe* (2) *in* (0, 1) *fast überall divergiert.*

In der Arbeit [4] wurde es bewiesen, daß unter den Bedingungen dieses Satzes ein orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}$ derart existiert, daß die Reihe (1) fast überall divergiert.

Vor dem Beweis dieses Satzes werden wir ein anderes Problem erwähnen. Für eine Folge $\{a_n\}$ setzen wir

$$\|\{a_n\}\| = \sup \sqrt{\int_0^1 \sup_i (a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_i\varphi_i(x))^2\,dx},$$

wobei das Supremum für jedes in (0, 1) orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ gebildet ist. In [5] wurde es bewiesen, daß aus $\|\{a_n\}\| < \infty$ die Konvergenz der Reihe (1) bei jedem orthonormierten System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall folgt; weiterhin aus $\|\{a_n\}\| = \infty$ folgt, daß ein orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}$ derart existiert, daß die Reihe (1) fast überall divergiert.

Das erwähnte Problem ist folgendes: Sei $\|\{a_n\}\| = \infty$ und $\Sigma a_n^2 < \infty$. Gibt es dann ein orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}$ und eine Indexfolge $\{n_k\}$ derart, daß die Reihe (1) fast überall konvergiert, und die Teilreihe (2) fast überall divergiert?

2. Zum Beweis des Satzes werden wir gewisse Hilfssätze benützen.

Hilfssatz I. ([4]) *Es seien* $c(\geqq 1)$ *und* $p(\geqq 2)$ *positive ganze Zahlen. Es kann ein im Intervall* [0, 5] *orthonormiertes System von Treppenfunktionen* $\{f_l(c, p; x)\}$ $(l = 1, \dots, 2p)$ *mit den folgenden Eigenschaften angegeben werden: zu jedem Punkt* $x \in \left(\frac{2}{c}, \frac{3}{c}\right)$ *gibt es eine von* x *abhängige natürliche Zahl* $m(x)$ *derart, daß die Funktionswerte* $f_l(c, p; x)$ $(l = 1, \dots, m(x))$ *positiv sind, und*

$$f_1(c, p; x) + \cdots + f_{m(x)}(c, p; x) \geqq A_1 \sqrt{cp} \log p$$

gilt, wo A_1 *eine positive, von* x, c *und* p *unabhängige Zahl ist.*

(In Folgendem bezeichnen $A_2, A_3, \dots$ positive, von den Parametern unabhängige Konstanten.)

Hilfssatz II. ([2]) *Es seien* d *und* q *positive ganze Zahlen,* $0 < d < q$. *Zu jedem Indexpaar* (i, j) *mit* $1 \leqq i \leqq q$, $1 \leqq j \leqq q$ *und* $|i - j| = d$ *soll eine von Null verschiedene Zahl* $\alpha_{i,j}$ *zugeordnet werden; wir bezeichnen mit* β_d *das Maximum der absoluten Beträge der Zahlen* $\alpha_{i,j}$. *In jedem Intervall* (u, v) *mit*

$$v - u > 2\beta_d\,.$$

können wir dann Treppenfunktionen $\varphi_l(x)$ $(l=1, \dots, q)$ derart definieren, daß die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

$$|\varphi_l(x)| = 1 \qquad (u < x < v;\ l = 1, \dots, q),$$

$$\int_u^v \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = -\alpha_{i,j} \qquad (|i-j| = d,\ 1 \leqq i \leqq q,\ 1 \leqq j \leqq q),$$

$$\int_u^v \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = 0 \qquad (i \neq j,\ |i-j| \neq d,\ 1 \leqq i \leqq q,\ 1 \leqq j \leqq q).$$

3. Beweis des Satzes. Es sei $N_m = 2(2+\dots+2^m)$ $(m=1, 2, \dots)$. Durch Induktion werden wir ein im Intervall $(0, 1)$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \dots)$ und zwei Folgen von einfachen Mengen[1]) $E_m(\subseteqq(0, 1))$, $F_m(\subseteqq(0, 1))$ $(m=1, 2, \dots)$ derart definieren, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Die Mengen E_m $(m=1, 2, \dots)$ sind stochastisch unabhängig, und für jedes m $(m=1, 2, \dots)$ gelten

$$m(E_m) \geqq \frac{1}{20}\min(1, N_{m+1}a^2_{2N_{m+1}}\log^2 2N_{m+1}), \tag{4}$$

$$m(F_m) \leqq \frac{1}{2m^2}. \tag{5}$$

Weiterhin für jedes m $(m=1, 2, \dots)$ bestehen

$$\max_{N_m < n \leqq N_{m+1}} \left| \sum_{l=N_m+1}^{n} a_{2l}\varphi_{2l}(x) \right| \geqq \frac{\sqrt{5}}{6} A_1 \qquad (x \in E_m), \tag{6}$$

$$\varphi_{2l}(x) = -\varphi_{2l-1}(x) \qquad (x \notin F_m;\ l = N_m+1, \dots, N_{m+1}). \tag{7}$$

Es sei

$$\varphi_n(x) = r_n(x) \qquad (n=1, \dots, 8=2N_1),$$

wobei $r_n(x) = \operatorname{sign} \sin 2^n\pi x$ die n-te Rademachersche Funktion bezeichnet. Es sei m_0 eine natürliche Zahl. Nehmen wir an, daß die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n=1, \dots, 2N_{m_0})$ und die Mengen $E_1, \dots, E_{m_0-1}, F_1, \dots, F_{m_0-1}$ derart definiert sind, daß diese Funktionen Treppenfunktionen sind, in $(0, 1)$ ein orthonormiertes System bilden, diese Mengen einfach sind, weiterhin $E_1, \dots, E_{m_0-1}$ stochastisch unabhängig sind, und (4)—(7) für $m = 1, \dots, m_0-1$ erfüllt werden.

Wir wenden den Hilfssatz I im Falle

$$c = \left[\frac{1}{N_{m_0+1}a^2_{2N_{m_0+1}}\log^2 2N_{m_0+1}} + 1\right], \quad p = 2^{m_0+1}$$

[1]) Eine Menge wird einfach genannt, wenn sie als Vereinigung endlichvieler Intervalle entsteht.

an ([α] bezeichnet den ganzen Teil von α). Auf Grund des Hilfssatzes I und der Monotonität der Folge $\{a_n\}$ gilt

(8)
$$\max_{1\leqq n\leqq 2.2^{m_0+1}} \sum_{l=1}^{n} a_{2N_{m_0}+2l} f_l(c,p;x) \geqq$$
$$\geqq A_1 \frac{1}{\sqrt{N_{m_0+1}}\, a_{2N_{m_0+1}} \log 2N_{m_0+1}} \sqrt{m_0+1}\, a_{2N_{m_0+1}} \sqrt{2^{m_0+1}} \geqq \frac{A_1}{6}$$
$$\left(x\in\left(\frac{2}{c},\frac{3}{c}\right)=E'_{m_0}\right).$$

Offensichtlich gilt

(9)
$$m(E'_{m_0}) \geqq \tfrac{1}{2}\min\left(1, N_{m_0+1} a^2_{2N_{m_0+1}} \log^2 2N_{m_0+1}\right).$$

Betrachten wir die Treppenfunktionen

$$\psi_{2l}(x) = \begin{cases} f_l(c,p;x) & (0<x<5),\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \qquad \psi_{2l-1}(x) = \begin{cases} -f_l(c,p;x) & (0<x<5),\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$(l=1,\dots,2.2^{m_0+1})$. Wir setzen

$$\alpha_{i,j} = \int_0^5 \psi_i(x)\psi_j(x)\,dx \qquad (1\leqq i,j\leqq 4.2^{m_0+1}).$$

Dann gelten

$$\alpha_{i,i}=1 \quad (1\leqq i\leqq 4.2^{m_0+1}); \qquad \alpha_{i,j}=1 \quad (|i-j|=1,\ 1\leqq i,j\leqq 4.2^{m_0+1}),$$
$$\alpha_{i,j}=0 \quad (i\neq j,\ |i-j|\neq 1,\ 1\leqq i,\ j\leqq 4.2^{m_0+1}).$$

Durch Anwendung des Hilfssatzes II kann man im Intervall (5, 8) Treppenfunktionen $\bar\varphi_1(x), \dots, \bar\varphi_{4.2^{m_0+1}}(x)$ derart definieren, daß

$$\int_5^8 \bar\varphi_i(x)\bar\varphi_j(x)\,dx = -\alpha_{i,j} \quad (|i-j|=1,\ 1\leqq i,\ j\leqq 4.2^{m_0+1}),$$
$$\int_5^8 \bar\varphi_i(x)\bar\varphi_j(x)\,dx = 0 \quad (i\neq j,\ |i-j|\neq 1,\ 1\leqq i,\ j\leqq 4.2^{m_0+1}),$$
$$\int_5^8 \bar\varphi_i^2(x)\,dx = 3 \qquad (i=1,\dots,4.2^{m_0+1})$$

bestehen.

Wir bilden die Funktionen

$$\bar\psi_l(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{5}{2-1/m_0^2}}\, \psi_l\left(\dfrac{5}{1-1/2m_0^2}\right) & \left(0<x<1-\dfrac{1}{2m_0^2}\right),\\ m_0\,\bar\varphi_l\left(3.2m_0^2\left(x-\left(1-\dfrac{1}{2m_0^2}\right)\right)+5\right) & \left(1-\dfrac{1}{2m_0^2}<x<1\right)\end{cases}$$

($l=1, \ldots, 4.2^{m_0+1}$). Nach den Obigen bilden die Treppenfunktionen $\bar{\psi}_l(x)$ ($l=1, \ldots$ $\ldots, 4.2^{m_0+1}$) ein orthonormiertes System im Intervall (0, 1). Weiterhin auf Grund der Definition der Funktionen $\bar{\psi}_l(x)$ ($l=1, \ldots, 4.2^{m_0+1}$) und (8), (9) folgt

$$\max_{1 \leqq n \leqq 2^{m_0+1}} \sum_{l=1}^{n} a_{2N_{m_0}+2l} \bar{\psi}_{2l}(c, p; x) \geqq \frac{\sqrt{5}}{6} A_1 \tag{10}$$

$$\left\{x \in \left(\frac{2}{c} \frac{1-1/2m_0^2}{5}, \frac{3}{c} \frac{1-1/2m_0^2}{5}\right) = E''_{m_0}\right\},$$

$$m(E''_{m_0}) \geqq \frac{1}{20} \min(1, N_{m_0+1} a^2_{2N_{m_0+1}} \log^2 2N_{m_0+1}), \tag{11}$$

$$\bar{\psi}_{2l}(x) = -\bar{\psi}_{2l-1}(x) \qquad \left\{x \in \left(1 - \frac{1}{2m_0^2}, 1\right) = F'_{m_0};\ l = 1, \ldots, 4.2^{m_0+1}\right\}, \tag{12}$$

$$m(F'_{m_0}) = \frac{1}{2m_0^2}. \tag{13}$$

Für ein endliches Intervall $I=[a, b]$ und für eine in (0, 1) definierte Funktion $f(x)$ setzen wir

$$f(I; x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) & (a < x < b), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

weiterhin für eine Menge H bezeichnen wir mit $H(I)$ diejenige Menge, die aus H durch die Transformation $y = (b-a)x + a$ entsteht.

Da die Funktionen $\varphi_n(x)$ ($n=1, \ldots, 2N_{m_0}$) Treppenfunktionen sind, und die Mengen $E_1, \ldots, E_{m_0-1}$, $F_1, \ldots, F_{m_0-1}$ einfach ,weiterhin die Mengen $E_1, \ldots, E_{m_0-1}$ stochastisch unabhängig sind, können wir das Intervall (0, 1) in endlichviele paarweise disjunkte Intervalle I_r ($1 \leqq r \leqq \varrho$) derart zerlegen, daß jede Funktion $\varphi_n(x)$ ($1 \leqq n \leqq 2N_{m_0}$) in jedem Intervall I_r ($1 \leqq r \leqq \varrho$) konstant ist, und die Mengen E_m ($1 \leqq m \leqq$ $\leqq m_0 - 1$), F_m ($1 \leqq m \leqq m_0 - 1$) die Vereinigung gewisser I_r sind. Die zwei Hälften von I_r bezeichnen wir mit I'_r, und I''_r ($1 \leqq r \leqq \varrho$).

Dann setzen wir

$$\varphi_{n+2N_{m_0}}(x) = \sum_{r=1}^{\varrho} \bar{\psi}_n(I'_r; x) - \sum_{r=1}^{\varrho} \bar{\psi}_n(I''_r; x) \qquad (n = 1, \ldots, 4.2^{m_0+1}),$$

$$E_{m_0} = \bigcup_{r=1}^{\varrho} (E''_{m_0}(I'_r) \cup E''_{m_0}(I''_r)), \qquad F_{m_0} = \bigcup_{r=1}^{\varrho} (F'_{m_0}(I'_r) \cup F'_{m_0}(I''_r)).$$

Nach dem Obigen und nach (10)—(13) ist es offensichtlich, daß die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($n=1, \ldots, 2N_{m_0+1}$) in (0, 1) ein orthonormiertes System bilden, die Mengen E_m, $F_m(\subseteqq (0, 1))$ ($m=1, \ldots, m_0$) einfach und, die Mengen E_m ($m=1, \ldots, m_0$) stochastisch unabhängig sind, weiterhin (3)—(7) für $m=1, \ldots, m_0$ bestehen. Das erwähnte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ und die Mengenfolgen $\{E_m\}$, $\{F_m\}$ mit den erwähnten Eigenschaften erhalten wir durch Induktion.

Wegen der Monotonität der Folge $\{a_n\}$ ergibt sich

$$\sum a_n^2 \log^2 n \leqq A_2 \sum a_{2n}^2 \log^2 2n \leqq A_3 \sum_{m=1}^{\infty} N_{m+1} a_{2N_{m+1}}^2 \log^2 2N_{m+1}.$$

Daraus und aus (3) folgt

$$\sum \min (1, N_{m+1} a_{2N_{m+1}}^2 \log^2 2N_{m+1}) = \infty. \tag{14}$$

Es sei $E = \overline{\lim_{m\to\infty}} E_m$. Da die Mengen E_m $(m=1, 2, \ldots)$ stochastisch unabhängig sind, und (4) für jede natürliche Zahl m besteht, auf Grund von (14), durch Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas erhalten wir

$$m(E) = 1. \tag{15}$$

Gilt aber $x \in E$, dann besteht (6) für unendlich viele Indizes m, und so divergiert die Reihe

$$\sum a_{2n} \varphi_{2n}(x). \tag{16}$$

Aus (15) folgt, daß die Reihe (16) fast überall divergiert.

Es sei $F = \overline{\lim_{m\to\infty}} F_m$. Da (5) für jedes m erfüllt wird, durch Anwendung der ersten Borel—Cantellischen Lemmas erhalten wir:

$$m(F) = 0. \tag{17}$$

Da auch (7) für jedes m erfüllt ist, erhalten wir daß im Falle $x \notin F$ eine von x abhängige natürliche Zahl $m_0 = m_0(x)$ derart existiert, daß

$$s_{2N}(x) - s_{2N_{m_0}}(x) = \sum_{n=2N_{m_0}+1}^{2N} a_n \varphi_n(x) = \sum_{l=N_{m_0}+1}^{N} (a_{2l-1} - a_{2l}) \varphi_{2l}(x), \tag{18}$$

$$s_{2N+1}(x) - s_{2N_{m_0}}(x) = \sum_{l=N_{m_0}+1}^{N} (a_{2l-1} - a_{2l}) \varphi_{2l}(x) + a_{2N+1} \varphi_{2N+1}(x)$$

$(N = N_{m_0}+1, \ldots)$ bestehen.

Wegen der Monotonität der Folge $\{a_n\}$ und wegen der Normierung der Funktionen erhalten wir

$$\sum_{l=1}^{\infty} (a_{2l-1} - a_{2l}) \int_0^1 |\varphi_{2l}(x)|\, dx \leqq \sum_{l=1}^{\infty} (a_{2l-1} - a_{2l}) \sqrt{\int_0^1 \varphi_{2l}^2(x)\, dx} \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} - a_n) = a_1 < \infty,$$

woraus durch Anwendung des B. Levischen Satzes folgt, daß die Reihe

$$(19)\qquad \sum_{l+1}^{\infty}(a_{2l-1}-a_{2l})\,\varphi_{2l}(x)\,.$$

fast überall konvergiert. Es sei G die Menge derjenigen Punkte x, in denen die Reihe (19) konvergiert. Dann ist also

$$(20)\qquad m(G)=1.$$

Wegen $\Sigma a_n^2<\infty$ und $\int\limits_0^1 \varphi_n^2(x)\,dx=1$ $(n=1, 2, \ldots)$ erhalten wir

$$(21)\qquad \lim_{n\to\infty} a_n\varphi_n(x)=0$$

fast überall. Es sei H die Menge derjenigen Punkte x, in denen (21) besteht. Dann ist also

$$(22)\qquad m(H)=1.$$

Es sei $\Omega=((0,1)\setminus F)\cap G\cap H$. Nach dem Obigen, auf Grund von (18) und (21) erhalten wir, daß im Falle $x\in\Omega$, die Reihe (1) konvergiert. Weiterhin aus (17), (20) und (22) folgt

$$m(\Omega)=1.$$

Damit haben wir bewiesen, daß die Reihe (1) fast überall konvergiert.

Wir haben also die Divergenz der Reihe (2) im Falle $n_k=2k$ $(k=1, 2, \ldots)$ bewiesen.

Schriftenverzeichnis

[1] D. E. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 82—105.

[2] D. E. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales bornées dans leur ensemble, *Recueil math. Moscou*, **3** (43) (1938), 103—120.

[3] H. RADEMACHER, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), 112—138.

[4] K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 57—130.

[5] K. TANDORI, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen. II, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 219—232.

(Eingegangen am 18. April 1972)